Πεπερασμένες διαφορές για το πρόβλημα δυο σημείων με ομογενείς συνοριακές Neumann

Διατύπωση του προβλήματος

Έστω πραγματικοί αριθμοί $a,\ b$ με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθι πρόβλημα δυο σημείων: αναζητάμε συνάρτηση $y\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) &= f(x), \quad \forall\, x \in [a,b], \\ y'(a) &= 0 \\ y'(b) &= 0, \end{aligned}$$

με $q,\ f \in C[a,b]$ δοσμένες συναρτήσεις και $y_a,\ y_b \in \mathbb{R}$ δοσμένα. Για να έχουμε μοναδική λύση πρέπει απαραίτητα να έχουμε ότι $q_{min} = \min_{x\in[a,b]} q(x) > 0$.

Περιγραφή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

Έστω N φυσικός αριθμός που δίνεται από το χρήστη. Ορίζουμε το πλάτος της διαμέρισης $h := \frac{b-a}{N}$ για το διάστημα $[a,b]$. Οι αντίστοιχοι κόμβοι ορίζονται ως εξής: $x_j = a + jh$, για $j = 0,\dots,N$. Συμβολίζουμε με y^j την προσέγγιση της $y(x_j)$ για $j = 0,\dots,N$. Κατασκευάζουμε προσεγγίσεις y^j για την προσέγγιση των τιμών $y(x_j)$. Όμως, σε αντίθεση με το πρόβλημα με τις Dirichlet συνοριακές, δεν γνωρίζουμε τις τιμές στα άκρα, τις $y(x_0)$ και $y(x_{N+1})$.

Βήμα 1 : Προσέγγιση εσωτερικών σημείων

Για να προσεγγίσουμε την $y''(x)$ στα σημεία $x_j,\ j = 1,\dots,N-1$, χρησιμοποιούμε την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου, την $\delta^c_{h,2}$.

Βήμα 2 : Προσέγγιση των άκρων

Θεωρούμε ότι η y επεκτείνεται άρτια στα αριστερά του a και δεξιά του b, δηλαδή

$$\begin{aligned} y(a+h) &= y(a-h), \quad h > 0, \\ y(b-h) &= y(b+h), \quad h > 0. \end{aligned}$$

Αφού η y επεκτείνεται άρτια αριστερά του a, τότε

$$y'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{y(a+h) - y(a-h)}{2h} = 0.$$

Επομένως, αν προσεγγίσουμε την $y''(a)$ με την κεντρική διαφορά, θα έχουμε,

$$y''(a) \approx \delta_{h,2} = \frac{y(a+h) - 2y(a) + y(a-h)}{h^2} = 2\frac{y(a+h) - y(a)}{h^2}$$

Ανάλογα εργαζόμαστε και για τον b.

Συνεπώς, οι προσεγγίσεις προσδιορίζονται ως λύση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
-\frac{y^{j-1} - 2y^j + y^{j+1}}{h^2} + q(x_j)y^j &= f(x_j), \quad j = 1, \ldots, N-1, \\
-2\frac{y^1 - y^0}{h^2} + q(x_0)y^0 &= f(x_0), \\
-2\frac{y^{N-1} - y^N}{h^2} + q(x_N)y^N &= f(x_N).
\end{aligned}$$

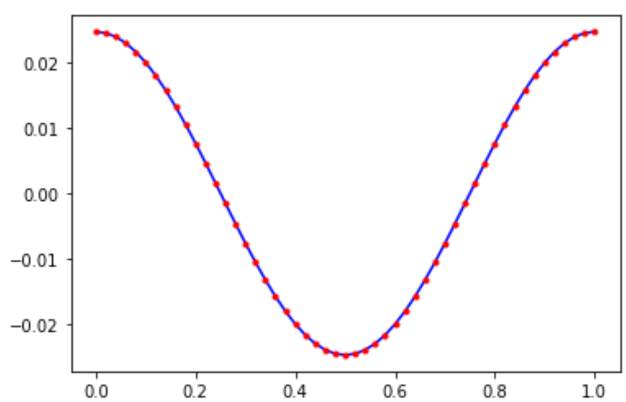
Άσκηση 1: Αν συμβολίσουμε με $Y \in \mathbb{R}^{N+1}$ το διάνυσμα με συνιστώσες $y^0, \ldots, y^N$, δηλαδή $Y = (y^0, \ldots, y^N)^T$, βρείτε το γραμμικό σύστημα που ορίζουν οι παραπάνω εξισώσεις και βεβαιωθείτε οτι έχει μοναδική λύση. Παρατηρήστε ότι ο πίνακας είναι τριδιαγώνιος.

Άσκηση 2: Έστω $y(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{1+4\pi^2}$ λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned}
-y''(x) + y(x) &= \cos(2\pi x), \quad \forall\, x \in [0,1], \\
y'(0) &= 0 \\
y'(1) &= 0,
\end{aligned}$$

Θεωρήστε $N = 50$ και κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνει η παραπάνω μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών και κατασκευάστε το γράφημα της προσεγγιστικής μαζί με την ακριβή λύση.

In [2]:



Πειραματική τάξη σύγκλισης

Γνωρίζουμε ότι αν $y \in C^4[a,b]$, τότε το σφάμλα της παραπάνω μεθόδου πεπερασμένων διαφορών ικανοποιεί την
$$\max_{0\le i\le N} |y^i - y(x_i)| \le Ch^2.$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα
$$\mathcal{E}(N) = \max_{0\le i\le N} |y^i - y(x_i)|,$$
για δυο διαφορετικές διαμερίσεις με $N_1 < N_2$, η πειραματική τάξη σύγκλισης ορίζεται ως
$$p = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}$$

Άσκηση 3: Θεωρήστε το διάνυσμα $N = [100, 200, 400]$, υπολογίστε τα σφάλματα $\mathcal{E}(N)$ και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών.

In [3]:

```
The error is : [7.92817769e-06 1.98176308e-06 4.95423172e-07]
The order convergence is : [2.0002048  2.00005124]
```